クラスター代数入門

中島　啓

京大数理研

2009 年 6 月 12 日

数遊び

ルール $\begin{smallmatrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{smallmatrix}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。($c = {}^{ad+1}/_{b}$)

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 2 & & 1 \\
 & & \boxed{1} & & 7 & & 3 & & 1 & \\
 & \boxed{1} & & 2 & & 4 & & 1 & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}$$

Theorem

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 2 & & 3 & & 2 & & 1 \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 3 & & 5 & & 5 & & 1 & \\
 & & \boxed{1} & & 4 & & 7 & & 8 & & 2 & & 1 \\
 & & & \boxed{1} & & 9 & & 11 & & 3 & & 1 & \\
 & & \boxed{1} & & 2 & & 14 & & 4 & & 1 & & \\
 & & & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & &
\end{array}$$

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

数式版 (A_2 型)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_2 \\
 & x_2 & & x_4 & & x_1 & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}/_{x_2} = {}^{x_1+x_2+1}/_{x_1x_2}$$

$$x_5 = {}^{x_4+1}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_1+1}/_{x_2}$$

$$x_6 = {}^{x_5+1}/_{x_4} = (\frac{x_1+1}{x_2} + 1) \cdot \frac{x_1x_2}{x_1+x_2+1} = x_1$$

$$x_7 = {}^{x_6+1}/_{x_5} = (x_1 + 1) \cdot \frac{x_2}{x_1+1} = x_2$$

三変数版 (A_3 型)

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
x_1 & & x_4 & & x_7 & & x_3 & \\
 & x_2 & & x_6 & & x_9 & & x_2 \\
x_3 & & x_5 & & x_8 & & x_1 & \\
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_4 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_5 = {}^{x_2+1}/_{x_3},$$

$$x_6 = {}^{x_4x_5+1}/_{x_2} = {}^{x_2^2+2x_2+1+x_1x_3}/_{x_1x_2x_3},$$

$$x_7 = {}^{x_6+1}/_{x_4} = \cdots = {}^{1+x_2+x_1x_3}/_{x_2x_3},$$

$$x_8 = {}^{x_6+1}/_{x_5} = \cdots = {}^{1+x_2+x_1x_3}/_{x_1x_2},$$

$$x_9 = {}^{x_7x_8+1}/_{x_6} = \cdots = {}^{1+x_1x_3}/_{x_2},$$

$$x_{10} = {}^{x_9+1}/_{x_7} = \cdots = x_3, \quad x_{11} = {}^{x_9+1}/_{x_8} = \cdots = x_1,$$

Theorem

1. このようにして現れる x_i は、最初に与えられた変数 (上の例の x_1, x_2, x_3) で表すと、分母は単項式、分子は正の整数を係数とする多項式となる、分数式で表される。
2. 最初に与えられた変数を除くと、必ず分数式になり、また分母に現れる単項式はすべて異なる。
3. しばらく並べると、上のように再び最初の変数が折れ線状に並ぶ。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
x_1 & & x_5 & & x_9 & & x_{13} & & x_4 \\
 & x_2 & & x_7 & & x_{11} & & x_3 & \\
x_3 & & x_6 & & x_{10} & & x_{14} & & x_2 \\
 & x_4 & & x_8 & & x_{12} & & x_1 & \\
\boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & &
\end{array}
$$

$$x_5 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \; x_6 = {}^{x_2x_4+1}/_{x_3}, \; x_7 = {}^{x_2^2x_4+x_2x_4+x_2+x_1x_3+1}/_{x_1x_2x_3},$$

$$x_8 = {}^{x_2x_4+x_3+1}/_{x_3x_4}, \quad x_9 = {}^{x_1x_3+x_2x_4+1}/_{x_2x_3},$$

$$x_{10} = {}^{x_2^2x_4+x_2x_4+x_2+x_2x_3+1+x_3+x_1x_3+x_1x_3^2}/_{x_1x_2x_3x_4},$$

$$x_{11} = {}^{x_1x_3^2+x_1x_2+x_2x_4+x_3+1}/_{x_2x_3x_4},$$

$$x_{12} = {}^{x_2+x_1x_3+1}/_{x_1x_2}, \quad x_{13} = {}^{x_3+1}/_{x_4}, \quad x_{14} = {}^{x_1x_3+1}/_{x_2}$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_1 & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_2 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^2}\!/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1{}^2+x_2{}^2+2\,x_2+1}\!/_{x_1{}^2x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}\!/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2+1+x_1{}^2}\!/_{x_1x_2},$$

$$x_6 = {}^{1+x_5{}^2}\!/_{x_4} = \cdots = {}^{1+x_1{}^2}\!/_{x_2},$$

$$x_7 = {}^{1+x_6}\!/_{x_5} = \cdots = x_1, \qquad x_8 = {}^{1+x_7{}^2}\!/_{x_6} = x_2$$

となって元に戻ります。

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 & & x_1 & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 & & x_2 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^3}\!/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}\!/_{x_1^3x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}\!/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}\!/_{x_1^2x_2},$$

$$x_6 = {}^{1+x_5{}^3}\!/_{x_4} = \cdots = {}^{x_1^6+2x_1^3+3x_2x_1^3+1+x_2^3+3x_2^2+3x_2}\!/_{x_2^2x_1^3},$$

$$x_7 = {}^{1+x_6}\!/_{x_5} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2+1}\!/_{x_1x_2}, \qquad x_8 = {}^{1+x_7{}^3}\!/_{x_6} = {}^{x_1^3+1}\!/_{x_2},$$

$$x_9 = {}^{1+x_8}\!/_{x_7} = x_1, \qquad x_{10} = {}^{1+x_9{}^3}\!/_{x_8} = x_2$$

となって元に戻ります。

四乗版? (H_2 型)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{x_1{}^4+x_2{}^4+4\,x_2{}^3+6\,x_2{}^2+4\,x_2+1}\!/_{x_1{}^4x_2},$$

$$x_5 = {}^{x_2{}^3+3\,x_2{}^2+3\,x_2+x_1{}^4+1}\!/_{x_1{}^3x_2},$$

$$x_6 = \frac{1}{x_1{}^8x_2{}^3}\Big[x_1{}^{12}+3\,x_1{}^8+6\,x_2{}^2x_1{}^8+8\,x_2x_1{}^8+36\,x_2{}^3x_1{}^4+3\,x_1{}^4+19\,x_2{}^4x_1{}^4+34\,x_2{}^2x_1{}^4+4\,x_2{}^5x_1{}^4$$
$$+16\,x_1{}^4x_2+56\,x_2{}^5+8\,x_2+1+8\,x_2{}^7+28\,x_2{}^2+70\,x_2{}^4+56\,x_2{}^3+28\,x_2{}^6+x_2{}^8\Big],$$

$$x_7 = \frac{1}{x_1^5x_2^2}\Big[x_1{}^8+3\,x_2{}^2x_1{}^4+5\,x_1{}^4x_2+2\,x_1{}^4+10\,x_2{}^3+1+5\,x_2{}^4+10\,x_2{}^2+x_2{}^5+5\,x_2\Big],$$

四乗版?

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 & & x_9 \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 & \end{array}$$

$$x_8 = \frac{1}{x_1{}^{12}x_2{}^5}\Big[**\Big],$$

$$x_9 = \frac{1}{x_1^7x_2^3}\Big[x_1{}^{12}+7\,x_2x_1{}^8+3\,x_1{}^8+3\,x_2{}^2x_1{}^8+18\,x_2{}^3x_1{}^4$$
$$+5\,x_2{}^4x_1{}^4+24\,x_2{}^2x_1{}^4+3\,x_1{}^4+14\,x_1{}^4x_2$$
$$+x_2{}^7+7\,x_2+7\,x_2{}^6+21\,x_2{}^2+35\,x_2{}^4+35\,x_2{}^3+21\,x_2{}^5+1\Big]$$

分母のみ

$$x_3 = \frac{1}{x_1}[**], \quad x_4 = \frac{1}{x_1^4 x_2}[**],$$

$$x_5 = \frac{1}{x_1^3 x_2}[**], \quad x_6 = \frac{1}{x_1^8 x_2^3}[**],$$

$$x_7 = \frac{1}{x_1^5 x_2^2}[**], \quad x_8 = \frac{1}{x_1^{12} x_2^5}[**],$$

$$x_9 = \frac{1}{x_1^7 x_2^3}[**], \quad x_{10} = \frac{1}{x_1^{16} x_2^7}[**],$$

$$x_{11} = \frac{1}{x_1^9 x_2^4}[**], \quad x_{12} = \frac{1}{x_1^{20} x_2^9}[**],$$

決して元に戻らない！

上も下も二乗にしてみる。($A_1^{(1)}$ 型)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & \end{array}$$

$$x_3 = {x_2^2+1}/{x_1}, \quad x_4 = {x_1^2+x_2^4+2x_2^2+1}/{x_1^2 x_2},$$

$$x_5 = {x_2^6+3x_2^4+2x_1^2x_2^2+3x_2^2+2x_1^2+x_1^4+1}/{x_1^3 x_2^2},$$

$$x_6 = \frac{1}{x_2^3 x_1^4}[x_1^6 + 2x_1^4x_2^2 + 3x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 + 3x_1^2x_2^4 + 3x_1^2 + 4x_2^2, \\ + 4x_2^6 + x_2^8 + 1 + 6x_2^4]$$

$$x_7 = \frac{1}{x_2^4 x_1^5}[x_1^8 + 2x_1^6x_2^2 + 4x_1^6 + 6x_1^4 + 9x_1^4x_2^2 + 3x_2^4x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 \\ + 4x_2^6x_1^2 + 4x_1^2 + 12x_1^2x_2^4 + 5x_2^8 + 1 + 10x_2^6 + x_2^{10} + 10x_2^4 + 5x_2^2]$$

やはり元に戻らない!

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_2 & x_6 \\ & x_7 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_8 & x_6 \\ & x_7 & \end{array}$$

$$x_5 = {1+x_2}/{x_1}, \quad x_6 = {1+x_2}/{x_3}, \quad x_7 = {1+x_2}/{x_4},$$

$$x_8 = {1+x_5x_6x_7}/{x_2} = {1+3x_2+3x_2^2+x_2^3+x_1x_3x_4}/{x_1x_2x_3x_4},$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_8 & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_{12} & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array}$$

$$x_9 = {(1+x_2)^2+x_1x_3x_4}/{x_2x_3x_4}, \quad x_{10} = {(1+x_2)^2+x_1x_3x_4}/{x_1x_2x_4},$$

$$x_{11} = {(1+x_2)^2+x_1x_3x_4}/{x_1x_2x_3},$$

$$x_{12} = \frac{1}{x_1x_2^2x_3x_4}\left[(1+x_2)^3+(3x_2+2)x_1x_3x_4+x_1^2x_3^2x_4^2\right],$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_{12} & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_{13} & x_{12} & x_{14} \\ & x_{15} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_{13} & x_{16} & x_{14} \\ & x_{15} & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} x_{17} & x_{16} & x_{18} \\ & x_{19} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_{17} & x_{20} & x_{18} \\ & x_{19} & \end{array} = \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array}$$

$$x_{13} = {1+x_2+x_1x_3x_4}/{x_1x_2}, \quad x_{14} = {1+x_2+x_1x_3x_4}/{x_2x_3},$$

$$x_{15} = {1+x_2+x_1x_3x_4}/{x_2x_4}, \quad x_{16} = {1+x_1x_3x_4}/{x_2},$$

$$x_{17} = x_1, \quad x_{18} = x_3, \quad x_{19} = x_4,$$

$$x_{20} = x_2$$

分子は難しいので、とりあえず分母だけ見てみよう。

$$A_2 : \begin{array}{ccccccc} x_1 & & {}^*/x_1 & & {}^*/x_2 & & x_2 \\ & x_2 & & {}^*/x_1x_2 & & x_1 & \end{array}$$

$$B_2 : \begin{array}{cccccccc} x_1 & & {}^*/x_1 & & {}^*/x_1x_2 & & x_1 & \\ & x_2 & & {}^*/x_1^2x_2 & & {}^*/x_2 & & x_2 \end{array}$$

$$G_2 : \begin{array}{cccccccccc} x_1 & & {}^*/x_1 & & {}^*/x_1^2x_2 & & {}^*/x_1x_2 & & x_1 & \\ & x_2 & & {}^*/x_1^3x_2 & & {}^*/x_1^3x_2^2 & & {}^*/x_2 & & x_2 \end{array}$$

$$H_2 : \begin{array}{cccccccccc} x_1 & & {}^*/x_1 & & {}^*/x_1^3x_2 & & {}^*/x_1^5x_2^2 & & {}^*/x_1^7x_2^3 & \cdots \\ & x_2 & & {}^*/x_1^4x_2 & & {}^*/x_1^8x_2^3 & & {}^*/x_1^{12}x_2^5 & & \end{array}$$

$$A_1^{(1)} : \begin{array}{cccccccc} x_1 & & {}^*/x_1 & & {}^*/x_1^3x_2^2 & & {}^*/x_1^5x_2^4 & \cdots \\ & x_2 & & {}^*/x_1^2x_2 & & {}^*/x_1^4x_2^3 & & \end{array}$$

D_4 型

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} {}^*/x_1 & x_2 & {}^*/x_3 \\ & {}^*/x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} {}^*/x_1 & {}^*/x_2 & {}^*/x_3 \\ & {}^*/x_4 & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} {}^*/x_2x_3x_4 & {}^*/x_2 & {}^*/x_1x_2x_4 \\ & {}^*/x_1x_2x_3 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} {}^*/x_2x_3x_4 & {}^*/x_1x_2^2x_3x_4 & {}^*/x_1x_2x_4 \\ & {}^*/x_1x_2x_3 & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} {}^*/x_1x_2 & {}^*/x_1x_2^2x_3x_4 & {}^*/x_2x_3 \\ & {}^*/x_2x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} {}^*/x_1x_2 & {}^*/x_2 & {}^*/x_2x_3 \\ & {}^*/x_2x_4 & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} x_1 & {}^*/x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array}$$